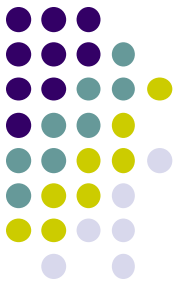




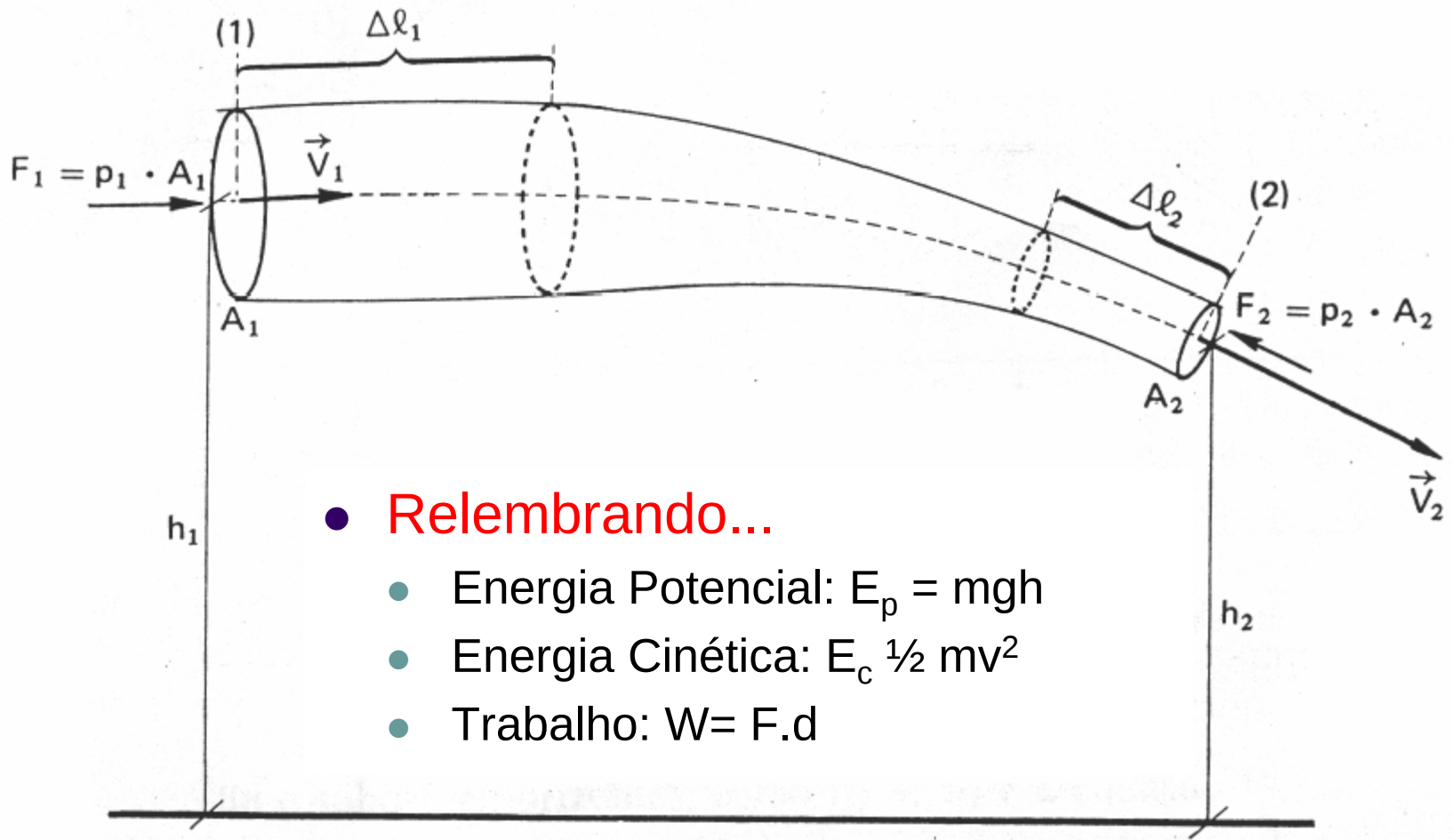
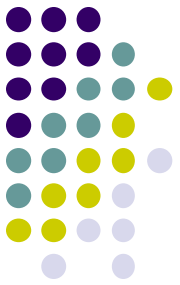
Equação de Bernoulli

Renato de Oliveira Fernandes

*Professor Assistente
Dep. de Construção Civil/URCA*



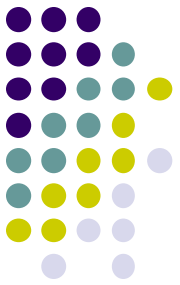
- A equação de Daniel Bernoulli (1738) estabelece uma relação entre a pressão, a velocidade e a altura.
 - A conservação da energia está relacionada sempre a um datum (plano de referência);
 - A carga de energia total permanece constante ao longo do escoamento;



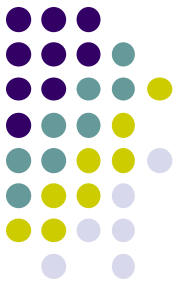
- **Relembrando...**

- Energia Potencial: $E_p = mgh$
- Energia Cinética: $E_c = \frac{1}{2} mv^2$
- Trabalho: $W = F \cdot d$

Condições básicas da equação de Bernoulli no escoamento



- Escoamento em regime permanente;
- Fluido incompressível (ρ - constante);
- Fluido ideal (fluido sem viscosidade ou sem dissipação de energia);
- Propriedades distribuídas uniformemente na seção do tubo;
- Sem a presença de máquina que adicione ou retire energia do sistema;
- Sem troca de calor;

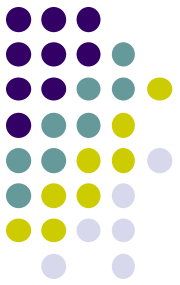


- O somatório do trabalho exercido pela força F_1 e F_2 é igual a variação da energia.

$$\begin{array}{c} W_{\vec{F}_1} + W_{\vec{F}_2} = \Delta E_C + \Delta E_P \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{(F_1 \cdot \Delta \ell_1) - (F_2 \cdot \Delta \ell_2)} = \boxed{\left(\frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} \right)} + \boxed{(m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1)} \end{array}$$

Mas, $F = p \cdot A$ e $\rho = \frac{m}{V}$

$$(p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta \ell_1) - (p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta \ell_2) = \left(\frac{\rho \cdot V \cdot v_2^2}{2} - \frac{\rho \cdot V \cdot v_1^2}{2} \right) + (\rho \cdot V \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot V \cdot g \cdot h_1)$$



$$A_1 \times \Delta \ell_1 = V \quad (\text{Volume})$$

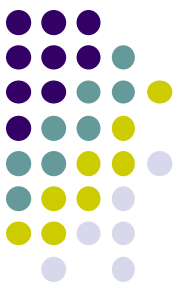
$$A_2 \times \Delta \ell_2 = V$$

$$\frac{(p_1 \cancel{V}) - (p_2 \cancel{V})}{\cancel{V}} = \left(\frac{\rho \cancel{V} v_2^2}{2} - \frac{\rho \cancel{V} v_1^2}{2} \right) + \frac{(\rho \cancel{V} g h_2 - \rho \cancel{V} g h_1)}{\cancel{V}}$$

$$p_1 - p_2 = \left(\frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} \right) + (\rho g h_2 - \rho g h_1)$$

Organizando os termos:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$



- Dividindo todos os termos da equação pelo peso específico (γ):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2\gamma} + \frac{\rho \cdot g \cdot h_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2\gamma} + \frac{\rho \cdot g \cdot h_2}{\gamma}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\cancel{\rho} \cdot v_1^2}{2(\cancel{\rho} \cdot g)} + \frac{\cancel{\gamma} \cdot h_1}{\cancel{\gamma}} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\cancel{\rho} \cdot v_2^2}{2(\cancel{\rho} \cdot g)} + \frac{\cancel{\gamma} \cdot h_2}{\cancel{\gamma}}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

Equação de
Bernoulli para
Fluído ideal.

Equação de Bernoulli para Fluido ideal.

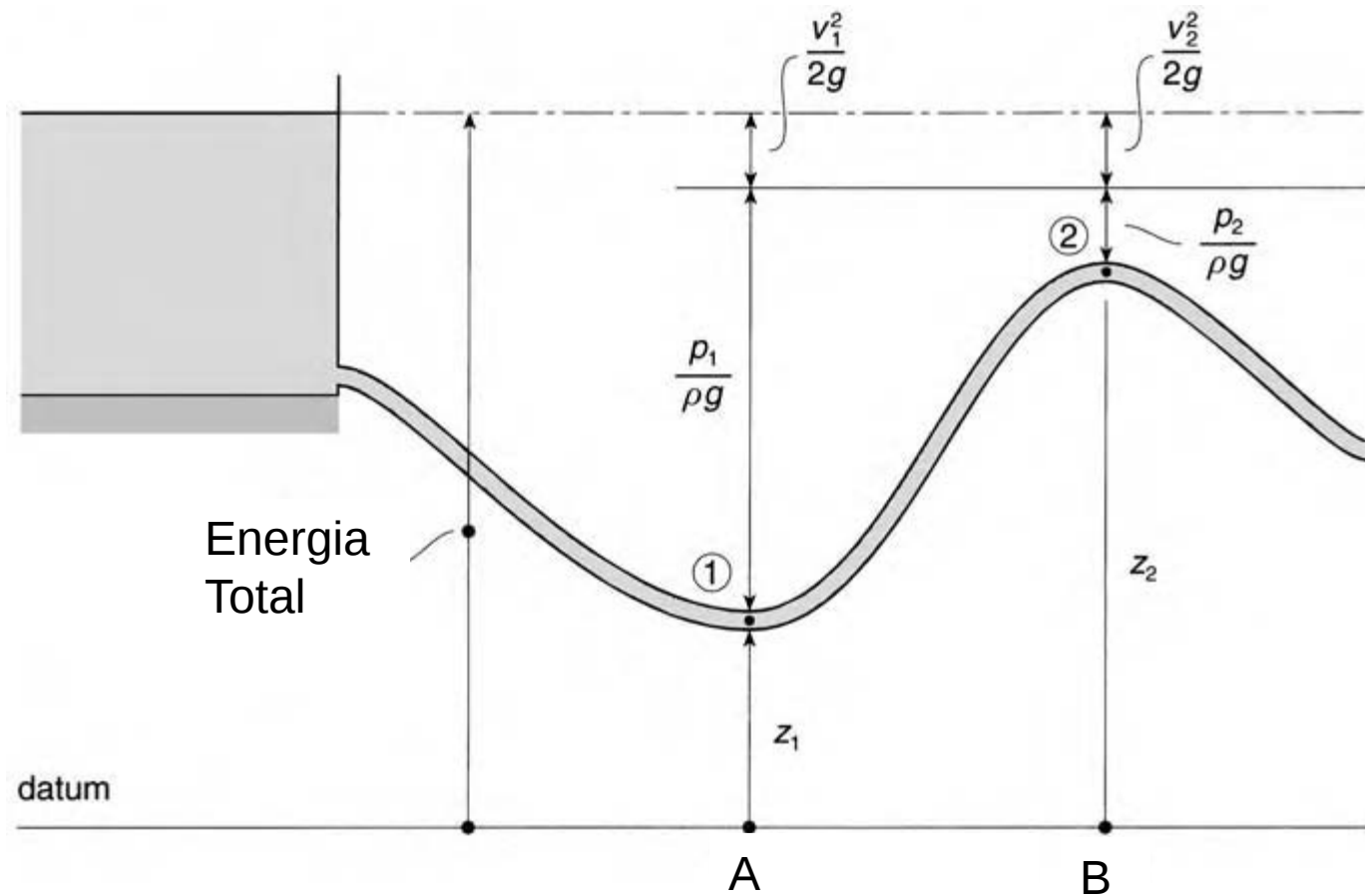
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

Carga de pressão
(associado com a pressão interna)

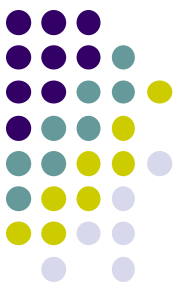
Carga de posição
(associado com a posição em relação ao datum)

Carga de velocidade
(associado a energia cinética do fluido durante o escoamento)

Carga não é energia!
A carga representa energia por unidade de peso.



- Exemplo: considerando que não exista perda de energia no escoamento de água do ponto 1 para o ponto 2, determine a pressão no ponto 2 sabendo que a pressão no ponto 1 vale **150 kPa** e que o ponto 2 está 7,5 m acima do ponto 1.



Solução do exemplo

$$\frac{p_1}{\gamma} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} + h_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \cancel{\frac{v_2^2}{2g}} + h_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{p_2}{\gamma} + h_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h_2 - h_1$$

$$h_2 - h_1 = 7,5 \text{ m}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h_2 - h_1 = 7,5 \text{ m}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h_2 - h_1 = 7,5 \text{ m}$$

$$p_1 - p_2 = \gamma \cdot 7,5 \text{ m}$$

$$p_1 - p_2 = 10000 \cdot 7,5 \text{ m}$$

$$p_1 - p_2 = 75 \text{ kPa}$$

$$150 \text{ kPa} - p_2 = 75 \text{ kPa}$$

$$150 \text{ kPa} - 75 \text{ kPa} = p_2$$

$$p_2 = 75 \text{ kPa}$$